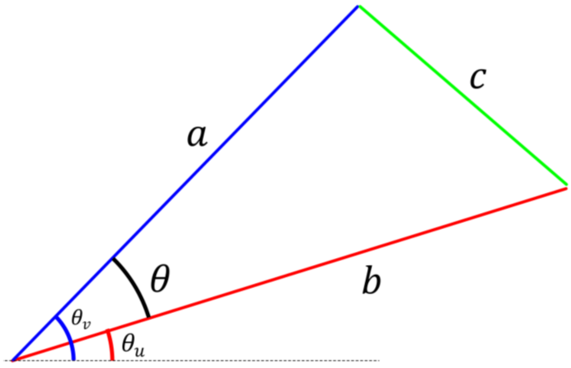
Théorème d’Al Kashi

Cours

Le théorème d’Al Kashi est la généralisation du théorème de Pythagore à tous les triangles - et pas seulement les triangles rectangles.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

Nous allons utiliser ce qu’on sait des vecteurs – notamment l’addition et le produit scalaire des vecteurs – pour prouver ce théorème. Il y aura aussi une identité trigonométrique, à démontrer par ailleurs, mais rien de bien méchant.



Soit deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$:

$$\vec{v} = (v_x\ v_y) \qquad\qquad \vec{u} = (u_x\ u_y)$$

Ces vecteurs sont séparés par un angle qui est la différence entre leurs angles par rapport à l’horizontale :

$$\theta = \theta_v - \theta_u$$

Les coordonnées de ces vecteurs se trouvent par trigonométrie :

$$\begin{aligned} v_x &= |\vec{v}|cos(\theta_v) \\ v_y &= |\vec{v}|sin(\theta_v) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u_x &= |\vec{u}|cos(\theta_u) \\ u_y &= |\vec{u}|sin(\theta_u) \end{aligned}$$

Le produit scalaire des vecteurs est donné par :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y$$

Appliquant les coordonnées à ce produit scalaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}|cos(\theta_v)|\vec{u}|cos(\theta_u) + |\vec{v}|sin(\theta_v)|\vec{u}|sin(\theta_u)$$

Réorganisons et factorisons :

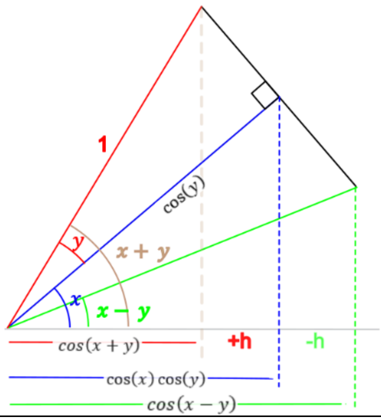
$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|cos(\theta_v)cos(\theta_u) + |\vec{v}||\vec{u}|sin(\theta_v)sin(\theta_u)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\big(cos(\theta_v)cos(\theta_u) + sin(\theta_v)sin(\theta_u)\big)$$

On utilise pour la suite les identités trigonométriques suivantes (vous pouvez déterminer la preuve de la première avec l’illustration ci-contre) :

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$



Cela donne l’expression suivante (un peu longuette, mais ça va se réduire) :

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\left(\frac{1}{2}(\cos(\theta_v-\theta_u)+\cos(\theta_v+\theta_u)) + \frac{1}{2}(\cos(\theta_v-\theta_u)-\cos(\theta_v+\theta_u))\right)$$

Factorisons la fraction :

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \frac{|\vec{v}||\vec{u}|}{2}(\cos(\theta_v-\theta_u)+\cos(\theta_v+\theta_u)+\cos(\theta_v-\theta_u)-\cos(\theta_v+\theta_u))$$

Des choses s’annulent ou se regroupent :

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \frac{|\vec{v}||\vec{u}|}{2}(\cos(\theta_v-\theta_u)+\cos(\theta_v-\theta_u))$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\theta_v-\theta_u)$$

Et comme $\theta = \theta_v - \theta_u$:

$$\boldsymbol{\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\theta)}$$

J’attire votre attention que cette formulation est en fait le théorème d’Al Kashi pour les vecteurs.

Maintenant, exprimons le vecteur $\vec{w}$ en termes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

Considérons la norme de ce vecteur – au carré. Et développons :

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{v}-\vec{u}|^2$$

$$|\vec{w}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{v}\cdot\vec{u}$$

On note au passage une propriété des vecteurs : leur carré est égal au carré de leur norme :

$$\left(|\vec{v}|cos(\theta_v)\ |\vec{v}|sin(\theta_v)\right)\cdot\left(|\vec{v}|cos(\theta_v)\ |\vec{v}|sin(\theta_v)\right) = |\vec{v}|^2cos^2(\theta_v) + |\vec{v}|^2sin^2(\theta_v)$$

$$= |\vec{v}|^2\left(cos^2(\theta_v)+sin^2(\theta_v)\right)$$

$$= |\vec{v}|^2$$

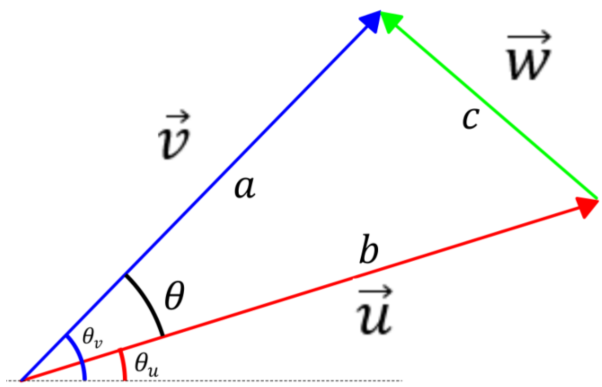
Appliquant cette information, cela donne :

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u}$$

Et comme nous avons découvert plus haut que $\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\theta)$:

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos(\theta)$$

Enfin, comme les normes des vecteurs sont des longueurs, on peut substituer :



$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)}$$

CQFD